

Einführung in die QCD

5. Übung

Aufgabe 1: Momente

Berechne die Mellin-Momente aller DGLAP Splitting-Funktionen $P_{ij}(x)$ in niedrigster Ordnung:

$$\begin{aligned}P_{qq}(x) &= \frac{4}{3} \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right)_+ \\P_{qg}(x) &= \frac{1}{2} [x^2 + (1-x)^2] \\P_{gq}(x) &= \frac{4}{3} \frac{1+(1-x)^2}{x} \\P_{gg}(x) &= 6 \left\{ \left(\frac{1}{1-x} \right)_+ + \frac{1-x}{x} - 1 + x(1-x) \right\} + \frac{33-2N_F}{6} \delta(1-x)\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Mellin-Inversion

Die Mellin-Transformierte einer Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$F(N) = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$$

Zeige, daß diese Transformation in folgender Weise invertiert werden kann (Mellin-Inversion)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dN x^{-N} F(N)$$

wobei σ so zu wählen ist, daß die Realteile aller Singularitäten von $F(N)$ kleiner als σ sind. Zeige weiterhin, daß die Mellin-Transformierte der Faltung zweier Funktionen f, g

$$(f \otimes g)(x) = \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z) g\left(\frac{x}{z}\right)$$

das Produkt der beiden Mellin-Transformierten ist:

$$\int_0^1 dx x^{N-1} (f \otimes g)(x) = F(N)G(N)$$