$\boxed{\text{Einführung in die QCD}}$

1. Übung

Aufgabe 1: SU(3)–Invarianz

Es seien $a_i^{(k)}, b_i^{(k)}$ $(i,k=1,2,3)$ Vektoren, die unter SU(3) transformieren wie

$$\begin{aligned} a_i'^{(k)} &= U_{ij} a_j^{(k)} \\ b_i'^{(k)} &= U_{ij}^* b_j^{(k)} \end{aligned}$$

wobei $U \in \mathrm{SU}(3)$. Zeige, daß

$$b_i^{(1)} \delta_{ij} a_j^{(1)} \qquad , \qquad \epsilon_{ijk} a_i^{(1)} a_j^{(2)} a_k^{(3)} \qquad , \qquad \epsilon_{ijk} b_i^{(1)} b_j^{(2)} b_k^{(3)}$$

invariant unter SU(3)–Transformationen sind.

Aufgabe 2: Dispersionsrelationen

Betrachte ein Streuproblem in der Optik:
Einfallende (ebene) Welle in einer Raumdimension:

$$A_{in}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; a(\omega) \; e^{-i\omega(t-x)} \qquad \text{mit} \qquad A_{in}(t,x) = 0 \quad \text{für} \quad x > t$$

Gestreute Welle:

$$A_{out}(t,x) = \frac{1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; f(\omega) \; a(\omega) \; e^{-i\omega(t-x)}$$

Zeige mit Hilfe der Kausalität, daß $f(\omega)$ in der oberen komplexen Halbebene $\Im m\omega \geq 0$ analytisch fortgesetzt werden kann. Wenn die Wellenfunktionen A_{in}, A_{out} reell sind, können sie wegen $a_{in}(-\omega) = a_{in}^*(\omega)$ dann auch in die untere komplexe Halbebene analytisch fortgesetzt werden. Leite unter diesen Bedingungen aus dem Cauchyschen Integralsatz und der Distributionsbeziehung

$$\frac{1}{z \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{z}\right) \mp i\pi\delta(z)$$

(P ist das Cauchysche Hauptwertintegral) die Dispersionsrelation her:

$$f(\omega) = f(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Im m f(\omega')}{\omega' - \omega - i\epsilon}$$

wenn $f(\omega) \to 0$ für $|\omega| \to \infty$, und

$$\frac{f(\omega)}{\omega} = \frac{f(0)}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Im m f(\omega')}{(\omega' - i\epsilon)(\omega' - \omega - i\epsilon)}$$

wenn $f(\omega)/\omega \to 0$ für $|\omega| \to \infty$.