1. Übung (Musterlösung)

1. Aufgabe:
$$b'^{(1)}_i \delta_{ij} a'^{(1)}_j = \delta_{ij} U^*_{ik} U_{jl} b^{(1)}_k a^{(1)}_l = (U^+U)_{kl} b^{(1)}_k a^{(1)}_l$$
$$= b^{(1)}_k \delta_{kl} a^{(1)}_l$$

$$\varepsilon_{i'j'k'} a'^{(1)}_{i'} a'^{(2)}_{j'} a'^{(3)}_{k'} = \varepsilon_{i'j'k'} U_{i'i} U_{j'j} U_{k'k} a^{(1)}_i a^{(2)}_j a^{(3)}_k = \varepsilon_{ijk} \operatorname{Det} U \, a^{(1)}_i a^{(2)}_j a^{(3)}_k$$
$$= \varepsilon_{ijk} a^{(1)}_i a^{(2)}_j a^{(3)}_k$$

$$\varepsilon_{i'j'k'} b'^{(1)}_{i'} b'^{(2)}_{j'} b'^{(3)}_{k'} = \varepsilon_{i'j'k'} U^*_{i'i} U^*_{j'j} U^*_{k'k} b^{(1)}_i b^{(2)}_j b^{(3)}_k = \operatorname{Det} U^+ \varepsilon_{ijk} b^{(1)}_i b^{(2)}_j b^{(3)}_k$$
$$= \varepsilon_{ijk} b^{(1)}_i b^{(2)}_j b^{(3)}_k$$

2. Aufgabe:
$$A_{in}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, a(\omega) e^{-i\omega(t-x)} \qquad [A_{in} = 0 \text{ für } t<x]$$
$$A^*_{in}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, a^*(\omega) e^{i\omega(t-x)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, a^*(-\omega) e^{-i\omega(t-x)}$$

$A_{in}(t,x)$ reell $\Rightarrow$ $\boxed{a^*_{in}(-\omega) = a_{in}(\omega)}$ (Spiegelprinzip)

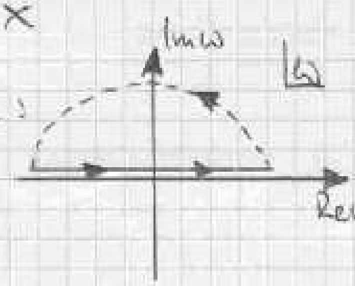
Umkehrtrafo: $a_{in}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2\pi} e^{-i\omega x} A_{in}(0,x) = \int_{0}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} e^{i\omega y} A_{in}(0,-y)$

$\omega \to \omega + i\sigma \quad \Rightarrow e^{i\omega y} \to e^{-\sigma y + i\omega y}$

$\Rightarrow$ $a_{in}(\omega)$ kann in obere komplexe Halbebene ($\sigma > 0$) analytisch fortgesetzt werden.

$\Rightarrow$ Mit Spiegelprinzip kann $a_{in}(\omega)$ in unterer Halbebene definiert werden

$\Rightarrow$ Gleiches gilt für $f(\omega)$ wegen Kausalität, d.h. $A_{out}(t,x) = 0$ für $t<x$

Cauchy-Integral: 

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - z}$$

$$f(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0+} f(\omega + i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\omega' f(\omega')}{\omega'-\omega-i\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\omega'-\omega-i\varepsilon} = \mathbb{P}\,\frac{1}{\omega'-\omega} + i\pi\,\delta(\omega'-\omega) \qquad [\omega',\omega \text{ reell}]$$

$$f(\omega) = \frac{\mathbb{P}}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega' f(\omega')}{\omega'-\omega} + 2C_\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\, f(\omega) &= \frac{\mathbb{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'\,\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'-\omega} + 2C'_\infty \\ \mathrm{Im}\, f(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\, f(\omega')\,\pi\,\delta(\omega'-\omega)\,d\omega' \end{aligned}\right\} f(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\frac{d\omega'\,\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'-\omega-i\varepsilon} + 2C'_\infty$$

(i) wenn $f(\omega) \to 0$ für $\omega \to \infty$:

unsubtrahierte Dispersionsrelation

$$\boxed{f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'\,\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'-\omega-i\varepsilon}}$$

(ii) wenn $\frac{f(\omega)}{\omega} \to 0$ für $\omega \to \infty$:

einfach subtrahierte Dispersionsrelation

$$\boxed{f(\omega) = f(0) + \frac{\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'\,\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'[\omega'-\omega-i\varepsilon]}}$$